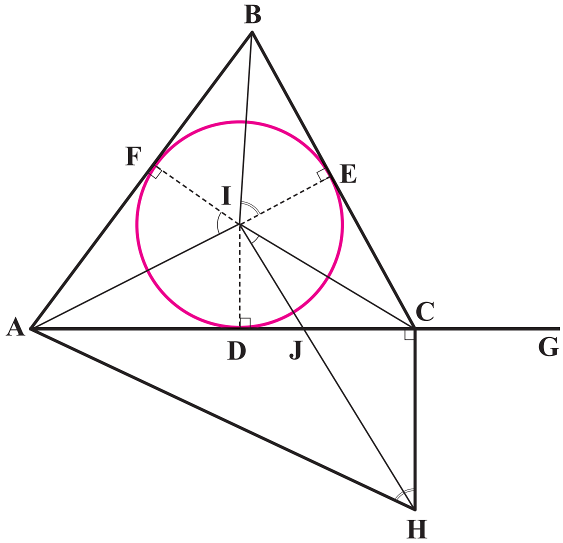
مراد کریمی شهماروندی، دبیر ریاضی دبیرستان‌های شهرکرد

اثبات هندسی رابطهٔ هرون



اشاره

رابطهٔ هرون فرمولی است که با استفاده از آن می‌توان مساحت یک مثلث را با داشتن طول‌های اضلاع و بدون داشتن طول ارتفاع آن به‌دست آورد. تاکنون به روش‌های جبری و مثلثاتی اثبات‌هایی از قضیهٔ هرون ارائه شده است. در این مقاله این رابطه به روش هندسی اثبات می‌شود. در رابطهٔ هرون، P نصف محیط مثلث و a ،b و c برابر اضلاع مثلث هستند.

اثبات

برای اثبات رابطهٔ هرون باید مراحل زیر را انجام دهیم:

مرحلهٔ اول (طریقهٔ ترسیم شکل): فرض کنید که دایرهٔ محاطی، به مرکز I و شعاع r بر اضلاع AC=b، BC=a و AB=c در نقاط D، E و F مماس باشد. بر امتداد AC، G را چنان اختیار می‌کنیم که: CG=BE. اکنون پاره‌خط IH را بر AI عمود کنید تا AC را در J و خط عمود بر AC (در نقطهٔ C) را در H قطع کند.

مرحلهٔ دوم (استفاده از داده‌های شکل): پاره‌خط‌های ID=IE=IF، به‌دلیل اینکه شعاع‌های دایره محاطی‌اند، با هم برابرند. همچنین می‌دانیم از هر نقطهٔ خارج یک دایره فقط دو مماس می‌توان بر آن رسم کرد که طول آن‌ها با هم برابرند. پس: AD=AF، BF=BE و CD=CE. می‌دانیم از چهار نقطهٔ I، C، H و A یک دایره می‌گذرد (چـرا؟). از این‌رو زاویه‌های CHA و AIC مکمل یکدیگرند. از طرف دیگر، اگر P را نصف محیط تعریف کنیم، طبق آنچه از کتاب درسی می‌دانیم:

$$ID = r = \frac{S}{P},\quad S = Pr$$

مرحلهٔ سوم: ثابت می‌کنیم: $\widehat{BIE} = \widehat{AHC}$. می‌دانیم در نقطه I مجموع زاویه‌ها ۳۶۰° درجه است؛ یعنی:

$$\widehat{BIF} + \widehat{BIE} + \widehat{CIE} + \widehat{CID} + \widehat{BIF} + \widehat{AID} = ۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow ۲\widehat{BIE} + ۲\widehat{CID} + ۲\widehat{AID} = ۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow \widehat{BIE} + \widehat{CID} + \widehat{AID} = ۱۸۰^\circ$$
$$\xrightarrow{\widehat{CID}+\widehat{AID}=\widehat{AIC}} \widehat{BIE} + \widehat{AIC} = ۱۸۰^\circ$$

$\widehat{BIE}, \widehat{AIC}$ مکمل یکدیگرند.
$\widehat{AIC}, \widehat{AHC}$ مکمل یکدیگرند. $\Rightarrow \widehat{BIE} = \widehat{AHC}$

مرحلهٔ چهارم: نشان می‌دهیم: AG=P.

$$۲P = AB + AC + BC = AF + BF + AD + CD + BE + CE$$
$$= (AF + AD) + (BF + BE) + (CD + CE)$$
$$= ۲AD + ۲BE + ۲CD = ۲(AD + BE + CD)$$
$$\xrightarrow{AG=AD+DC+CG} ۲P = ۲AG \Rightarrow P = AG$$

مرحلهٔ پنجم: از تناسب بین اضلاع در مثلث‌های متشابه برای به‌دست آوردن رابطه استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{BIE} \sim \overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \dfrac{AC}{BE} = \dfrac{CH}{IE}\,(۱) \\ DIJ \sim HCJ \Rightarrow \dfrac{CH}{ID} = \dfrac{JC}{DJ}\,(۲) \end{array}\right\} \overset{ID=IE}{\Rightarrow}$$

$$\frac{AC}{BE} = \frac{JC}{DJ} \xrightarrow{BE=CG} \frac{AC}{CG} = \frac{CJ}{DJ}$$
$$\Rightarrow \frac{\overbrace{AC+CG}^{AG}}{CG} = \frac{\overbrace{CJ+DJ}^{CD}}{DJ} \Rightarrow \frac{AG}{CG} = \frac{CD}{DJ}$$
$$\Rightarrow \frac{AG^۲}{CG \times AG} = \frac{CD \times AD}{DJ \times AD}$$
$$\Rightarrow \frac{AG^۲}{CG.AG} = \frac{CD \times AD}{ID^۲} \Rightarrow AG^۲.ID^۲ = AG.CG.CD.AD$$
$$\Rightarrow (AG.ID)^۲ = AG.CG.CD.AD \Rightarrow (AG.ID = P.r = S)$$
$$\Rightarrow S^۲ = AG.CG.CD.AD \Rightarrow S = \sqrt{AG.CG.CD.AD}$$
$$= \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad \text{(رابطهٔ هرون)}$$

$$\left|\begin{array}{l} AG = p \\ CG = AG - AC = P - b \\ AD = AG - (CD + CG) = AG - (CE + BE) = P - a \\ CD = AG - (AD + CG) = AG - (AF + BF) = P - c \end{array}\right.$$